О НѢКОТОРЫХЪ АРИѲМЕТИЧЕСКИХЪ СВОЙСТВАХЪ РѢШЕНІЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. Среди попытокъ обобщенія знаменитой теоремы Эйзенштейна, относящейся къ ариѳметическимъ свойствамъ разложеній

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad (1)$$

удовлетворяющихъ алгебраическому уравненію, наиболѣе заслуживающими вниманіе является изслѣдованія Пиншерлэ, прямымъ продолженіемъ которыхъ является наша работа: „О нѣкоторыхъ ариѳм. свойствахъ регулярныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій". Матем. Сб. т. XXVI. 1907 г. и теорема Тейксейра, который доказываетъ, что, если рядъ (1) представляетъ рѣшеніе алгебраическаго дифференціальнаго уравненія:

$$f(x, y, y' \ldots\ y^{(n)})=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

то

$$\frac{p_n}{n}<1.$$

Теорема Тейксейра въ нѣкоторыхъ случаяхъ невѣрна, какъ мы имѣли уже случай замѣтить въ вышеупомянутой статьѣ.

Ошибка Тейксейра была замѣчена Гурвицемъ [1]) (что намъ было неизвѣстно, когда мы писали вышеупомянутую статью). Теорему Тейксейра Гурвицъ замѣнилъ слѣдующей:

Если рядъ (1) съ раціональными коэффиціентами a_i удовлетворяетъ алгебраическому дифференціальному уравненію (2), то существуетъ цѣлая функція $\gamma(z)=\gamma_0+\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\cdots\gamma_\nu z^\nu$, и цѣлое число n такое, что простые множители, содержащіеся въ знаменателяхъ приведенныхъ дробей $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\ldots$ дѣлятъ послѣдовательно

$$\gamma(n),\ \gamma(n)\gamma(n+1),\ \gamma(n)\gamma(n+1)\gamma(n+2)\ \ldots$$

при чемъ всѣ числа $\gamma(n)$, $\gamma(n+1)$ $\gamma(n+2)\ldots$ отличны отъ нуля.

Въ настоящей работѣ мы:

1) Дополняемъ изслѣдованіе Гурвица и Тейксейра выводомъ еще новаго ариѳметическаго свойства.

Въ то время какъ свойство Гурвица относится къ предѣльнымъ величинамъ для простыхъ множителей и даетъ, что $\frac{p_n}{n^k}$ при возрастаніи n сохраняетъ конечное значеніе (p_n наиб. простой множитель знаменателя a_n, k нѣкоторое опредѣленное цѣлое число), свойство нами доказываемое относится къ показателю степени $h_n(p)$ простого множителя p даннаго знаменателя a_n.

Мы доказываемъ, что

$$\frac{h_n(p)}{\sigma^n},$$

гдѣ σ степень уравненія (2) при возрастаніи n сохраняетъ конечное значеніе.

Невыполнимость любого изъ этихъ двухъ условій влечетъ собой слѣдствіе, что функція:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ \ldots\ldots\ a_nx^n+\ \ldots$$

не опредѣляется никакимъ алгебраическимъ дифференціальнымъ уравненіемъ, т. е. представляетъ, согласно терминологіи

[1]) *Hurwitz*. Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation differentielle algébrique. Annales de l'Ecole Normale. t. VI. III. Série, 1889 годъ.

Мура [1]), Тицкэ и т. д. *трансценденталь-трансцендентную функцію.*

2) Мы указываемъ на очевидную возможность (не входя въ детали), пользуясь общими свойствами цѣлыхъ функцій съ цѣлыми коэффиціентами отъ трансцендентныхъ чиселъ, не связанныхъ между собой алгебраически (R—функцій), доказанными въ вышеупомянутой нашей статьѣ, обобщить всѣ эти результаты на случай какихъ угодно алгебраическихъ или трансцендентныхъ коэффиціентовъ a_i.

3) Обобщаемъ эти результаты на случай трансцендентныхъ дифференціальныхъ уравненій съ лѣвой частью, выраженной въ конечномъ видѣ $(x, y, y' \ldots y^{(m)})$, доказывая, что подобныя уравненія не могутъ опредѣлять трансценденталь-трансцендентныя функціи. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы доказываемъ теорему, аналогичную теоремѣ Чебышева, упомянутой въ литографированномъ курсѣ Эрмита и, наконецъ,

4) Мы доказываемъ нѣкоторыя ариѳметическія свойства, спеціально присущія рѣшеніямъ уравненій перваго порядка, выражаемымъ въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ.

А именно мы доказываемъ, что въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто свойство:

$$\frac{\lambda_n(p)}{n^l}$$

при нѣкоторомъ конечномъ l сохраняетъ конечное значеніе при безконечномъ возрастаніи n.

§ 2. Напомнимъ слѣдующія свойства R—функціи, доказанныя вышеупомянутой нашей статьѣ.

---

[1]) *N. Moore.* Concerning Transcendentally-Transcendental Function. Mathem. Ann. B. 48 (1897) стр. 49.

Titzke. Monatschefte Math. 16 (1905) p. 159. Къ этому ряду изслѣдованій относится и работа о функціи Гамма *Hölder'a* Mathem. Ann. 28. p. 1, хотя послѣдній не употребляетъ принятаго Муромъ, Тицкэ и нами термина.

Цѣлой R—функціей называемъ выраженіе

$$F(\xi_1,\xi_2\ldots\xi_q, C_1, C_2\ldots C_r)$$

F цѣлая функція

1) трансцендентныхъ $\xi_1\ \xi_2\ldots\xi_q$, не связаныхъ алгебраически, и

2) независимыхъ произвольныхъ постоянныхъ $C_1\ C_2\ \ldots C_r$.

Опредѣленія.

1) F дѣлится на Φ, если

$$F=\Phi\Psi,$$

гдѣ Ψ. R—функція.

2) Простыми множителями F называемъ R—функціи, дѣлящія F и не дѣлящіяся на цѣлыя числа или цѣлыя R—функціи.

3) $\Phi_1>\Phi_2$, если соблюдены условія: Если Φ_1, Φ_2 степеней ρ_1, ρ_2 и ρ наибольшее изъ чиселъ (ρ_1, ρ_2), если затѣмъ

$$A_\lambda,\ A_{\lambda-1}\ldots\ldots\ A_0$$

коэффиціенты полинома ρ-ой степени, выписанныя въ опредѣленномъ порядкѣ

$$A_{\lambda.1}\ \ A_{\lambda+1.1}\ldots\ A_{0.1}$$

$$A_{\lambda.2},\ A_{\lambda-1.2}\ldots\ A_{0.2}$$

ихъ значенія для Φ_1 и Φ_2, то

$$A_{\lambda.1}>A_{\lambda.2}$$

или

$$A_{\lambda.1}=A_{\lambda.2}$$

$$A_{\lambda-1,1}>A_{\lambda-1.2}$$

и т. д. вообще

$$A_{j-1}=A_{j.2}\ \ j=\lambda,\ \lambda-1\ldots\ k+1$$

$$A_{k.1}>A_{k.2}$$

5) Подъ абсолютной величиной Φ_1, обозначаемой (Φ_1), будемъ разумѣть цѣлую R—функцію съ коэффиціентами, рав-

ными абсолютнымъ значеніемъ соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ Φ_1 ($\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_q$, $C_1\ C_2 \ldots C_v$)

6) Мы называемъ R—функцію конечной, если коэффиціенты ея конечны и степень ея конечна. Если мы говоримъ, напримѣръ, что

$$\frac{p_n}{n^k}\text{, гдѣ } p_n = \alpha_{0n}\, \xi^a + \alpha_{1n}\ \xi^{a-1} + \ldots \alpha_{an}$$

при безконечномъ возрастаніи остается конечно, то это значитъ, что

$$a,\ \frac{\alpha_{0n}}{n^k}\ \frac{\alpha_{1n}}{n^k} \ldots \frac{\alpha_{an}}{n^k}$$

при безконечномъ возрастаніи n остаются конечны.

Теоремы: 1) Если Ф, дѣля $F\Psi$ съ Ψ, взаимнопростая, то она дѣлитъ F.

2) Произведеніе нѣсколькихъ цѣлыхъ R—функцій тогда только дѣлится на простую цѣлую R—функцію или простое число p, если одинъ изъ множителей дѣлится на p.

3) Не обращая вниманіе на знаки и порядокъ множителей, можно сказать, что всякая цѣлая R—функція разлагается только однимъ способомъ на произведеніе простыхъ множителей.

4) Если p_n дѣлитель c_n и, если $\frac{c_n}{n^k}$ остается конечнымъ при возрастаніи n, то то же относится и къ $\frac{p_n}{n^k}$.

Этой теоремой слѣдуетъ замѣнить теорему § 17 вышеупомянутой статьи вѣрную лишь при положительныхъ коэффиціентахъ F, p, q.

Для доказательства ея вмѣсто ξ_i, C_i подставляемъ опредѣленныя цѣлыя числа черезъ что равенство

$$q_n = p_n r_n,$$

гдѣ r_n цѣлая R функція остается въ силѣ и даетъ

$$q_n^{(j)} = p_n^{(j)} r_n^{(j)},$$

гдѣ $q_n^{(j)}, p_n^{(j)}, r_n^{(j)}$ цѣлыя числа.

Отсюда слѣдуетъ, что такъ какъ вмѣстѣ и $\frac{q_n}{n^k}$ остается конечно, $\frac{q_n^{(j)}}{n^k}$ вмѣстѣ съ тѣмъ остается конечнымъ и

$$\frac{p_n^{(j)}}{n^k} \leqq \frac{q_n^{(j)}}{n^k}.$$

Взявъ нѣсколько системъ значеніи ξ_i, C_i, получаемъ для коэффиціента p_n выраженіе

$$A = \sum_{j=1}^{j=s} e_j p_n^{(j)},$$

гдѣ e_j не зависятъ отъ n, откуда заключаемъ, что $\frac{A}{n^k}$ остается конечнымъ.

§ 3. Алгебраическое дифференціальное уравненіе всегда можетъ быть приведено къ виду

$$f\,(x,\ y,\ y' \ldots y^{(m)}) = 0,$$

гдѣ f цѣлая функція $(x,\ y,\ y' \ldots y^{(m)})$, коэффиціенты въ общемъ могутъ быть какими угодно числами алгебраическими или трансцендентными.

Коэффиціенты вообще будутъ алгебраическими функціями конечнаго числа трансцендентныхъ

$$\zeta_1,\ \zeta_2 \ldots \zeta_r$$

или что то же раціональными функціями отъ

$$\zeta_1,\ \zeta_2 \ldots \zeta_r,\ s,$$

гдѣ s опредѣляется уравненіемъ:

$$\sum_{j=1}^{j=\pi} E_{0j}\ s^j = 0 \qquad (*)$$

гдѣ E_{0j} цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ ζ [цѣлыя R—функціи].

Взявъ

$$\prod \Phi\,(\zeta_1,\ \zeta_2 \ldots \zeta_p,\ s,\ x,\ y,\ y' \ldots y^{(m)}) = 0$$

гдѣ

$$\Phi\,(\zeta_1\ \zeta_2 \ldots \zeta_p,\ s,\ x,\ y,\ y' \ldots y^{(m)}) = f\,(x,\ y,\ y' \ldots y^{(m)})$$

и распространяя П на всѣ корни уравненія (*) получаемъ уравненіе степени не больше

$$\sigma = \pi\tau$$

гдѣ τ степень даннаго уравненія

$$F\,(x,\ y,\ y' \ldots y^{(m)} = 0 \qquad (3)$$

коэффиціенты въ конечномъ будутъ уже цѣлыя R—функціи.

Предположимъ, что y опредѣляется разложеніемъ

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (1)$$

Тогда

$$a_i = \frac{y_0^{(i)}}{i!} \qquad (4)$$

Нѣкоторыя изъ $y_0^{(i)}$ (или a_i) въ числѣ не большемъ m т. е. порядка уравненія (2) могутъ оставаться произвольными, другіе же опредѣляются изъ уравненій, получаемыхъ послѣдовательнымъ дифференцированіемъ уравненіе (3) и будутъ алгебраическими функціями $y_0^{(i)}$ или a_i.

Поэтому, если нѣкоторые изъ коэффиціентовъ a_i будутъ трансцендентными, то остальные коэффиціенты будутъ алгебр. функціями отъ опредѣленнаго числа трансц. ξ_i не большаго m. Ниже будетъ доказано, что начиная съ нѣкоторыхъ значеній i,. $y_0^{(m+i)}$ или a_{m+i} опредѣляются уравненіями первой степени въ $y_0^{(m+i-1)}$, $y_0^{(m+i-2)} \ldots y'_0$, y_0. Поэтому если

$$y_0^{(m+p)} = \Phi_{m+p}\ [y_0^{(m+i-1)},\ y_0^{(m+i-2)} \ldots\ y'_0,\ y_0,\ u] \tag{5}$$

гдѣ u опредѣляется уравненіемъ

$$\sum_{j=0}^{j=\rho} \mathrm{H}_j\ (y_0^{(m-1)},\ y_0^{(m-2)} \ldots y'_0,\ y_0)\ u^j = 0 \tag{6}$$

гдѣ H_i, Φ_{m+p} раціональныя функціи съ цѣлыми (или равными цѣлымъ R—функціямъ) коэффиціентами, то имѣемъ также

$$y_0^{(m+p+1)} = \Phi_{m+p+1}\ [y_0^{(m-1)},\ y_0^{(m)}\ \ldots\ y'_0,\ y_0,\ u]$$

гдѣ Φ_{m+p+1} раціональная функція $y_0^{(m-1)} \ldots y'_0$, y_0, u.

Замѣняя $y_0^{(m-1)}$, $y_0^{(m-2)} \ldots y'_0$, y_0 ихъ выраженіями съ помощью трансцендентныхъ и произвольныхъ постоянныхъ мы получаемъ a_n въ формѣ раціон. функціи съ цѣлыми коэфф.

$$\zeta_i,\ \xi_i.\ C_i,\ v,\ u$$

$$a_n = \theta[\zeta_1,\ \zeta_2 \ldots \zeta_q,\ \xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_q,\ C_1,\ C_2 \ldots C_q,\ v,\ u] \tag{7}$$

гдѣ v опредѣляется уравненіемъ

$$\sum_{j=0}^{j=\lambda} \vartheta_j\ (\zeta_1,\ \zeta_2 \ldots \zeta_r,\ \xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_p,\ C_1,\ C_2 \ldots C_q)\ v^j = 0 \tag{8}$$

гдѣ ϑ_j цѣлыя R—функціи,

u опредѣляется уравненіемъ

$$\sum_{j=0}^{j=\mu} \eta_j\ (\zeta_1,\ \zeta_2 \ldots \zeta_v,\ \xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_p,\ C_1,\ C_2 \ldots C_q,)\ u^j = 0 \tag{9}$$

гдѣ η_j цѣлая R—функціи отъ ζ_i, ξ_i, C_i и v.

Изъ уравненій (8) и (9) выводимъ уравненіе степени не выше $\lambda\mu$ т. е. конечной не превосходящей опредѣленнаго предѣла степени, каково бы ни было n

$$\sum_{j=0}^{j=\nu} \varphi_j\,(\zeta_1,\ \zeta_2..\zeta_r,\ \xi_1,\ \xi_2..\xi_p,\ C_1,\ C_2..C_q,\ v)\ u^j=0 \tag{10}$$

Далѣе можно написать также

$$u=\Theta\,(\zeta_1,\ \zeta_2..\zeta_r,\ \xi_1,\ \xi_2,..\xi_p,\ C_1,\ C_2...C_q,\ t) \tag{11}$$

$$v=\mathrm{H}\,(\zeta_1,\ \zeta_2..\zeta_r,\ \xi_1,\ \xi_2..\xi_p,\ C_1,\ C_2,..C_q,\ t) \tag{12}$$

въ видѣ R—функцій ζ_i, ξ_i, C_i, и t, гдѣ t опредѣляется уравненіемъ (неприводимымъ):

$$\sum_{j=0}^{j=\rho} \omega_j\,(\zeta_1,\ \zeta_2..\zeta_r,\ \xi_1,\ \xi_2..\xi_p,\ C_1,\ C_2...C_q)\ t^j=0 \tag{13}$$

гдѣ ω_i цѣлыя R—функціи они ζ_i, ξ_i, C_i. Тогда на основаніи уравненія (8), какъ въ случаѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$a_n=\frac{\Omega_n(\zeta_1,\ \zeta_2..\zeta_r,\ \xi_1,\ \xi_2\ \xi_p..C_1\ C_2..C_q)}{C_n(\zeta_1,\ \zeta_2..\zeta_r,\ \xi_1,\ \xi_2..\xi_p,\ C_1,\ C_2..C_q)} \tag{14}$$

гдѣ

$$\Omega_n(\zeta_1,\ \zeta_2..\zeta_r,\ \xi_1,\ \xi_2..\xi_p,\ C_1,\ C_2..C_q)=$$

$$=\sum_{j=0}^{j=\rho-1} a^{(j)}{}_n\,(\zeta_1,\ \zeta_2..\zeta_r,\ \xi_1,\ \xi_2..\xi_p,\ C_1,\ C_2..C_q)\,t^j \tag{15}$$

C_r, $a^{(j)}{}_n$ цѣлыя R—функціи.

Отсюда вытекаютъ два свойства, всегда присущія разложеніямъ, опредѣляемымъ алгебраическими уравненіями.

1) Число произвольныхъ постоянныхъ и число трансцендентныхъ, не связанныхъ алгебраическими уравненіями, должно быть всегда конечно.

2) Степень неприводимаго уравненія съ коэффиціентами, равными R—функціямъ, опредѣляющаго a_n не должна превосходить конечнаго предѣла при возрастаніи n.

Какъ только одно изъ этихъ условій нарушено, y не можетъ уже опредѣляться алгебраическимъ дифференціальнымъ уравненіемъ, y представляетъ согласно терминологіи Мура, Тичкэ и др. *трансцендентальтрансцендентную* функцію.

Возьмемъ для примѣра разложеніе

$$y=1+\frac{x}{e^c}+\frac{x^2}{e^{c^2}}+\frac{x^3}{e^{c^3}}+\cdots\frac{x^n}{e^{c^n}}+\cdots \tag{16}$$

гдѣ c произвольное постоянное. y трансцендеталь-трансцендентная функція.

Въ самомъ дѣлѣ разложеніе (16) вида

$$y=1+\frac{x}{\xi_1}+\frac{x^2}{\xi_2}+\frac{x^3}{\xi_3}+\cdots\frac{x^n}{\xi_n}+\cdots$$

оно содержитъ безконечное множество трансцендентныхъ независимыхъ алгебраически. Въ самомъ дѣлѣ на основаніи нашихъ изслѣдованій*) всякая алгебраическая зависимость между $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_p, C$.

$$\Phi\,[\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_p, C]=0,$$

вѣрная при всякомъ C сводится къ уравненію типа

$$\xi_1^{\lambda_1}\,\xi_2^{\lambda_2}\ldots\xi_p^{\lambda_n}=\omega$$

гдѣ ω алгебраическая относительно C функція, $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ раціональныя числа отличныя отъ нуля, а это послѣднее предполагаетъ уравненіе

$$\lambda_1 C+\lambda_2 C^2+\lambda_3 C^3+\cdots\lambda_p C^p{}_p=0$$

при всякомъ C, т. е.

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots\lambda_p=0.$$

---

*) *Д. Мордухай-Болтовской.* Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненіи § 15 стр. 43. Варшавскія Университетскія Извѣстія за 1909 годъ.

Точно такимъ же образомъ функція

$$y=1+\frac{x}{e^c\lg(C+1)}+\frac{x^2}{e^{2c}\lg(C+2)}+$$

$$+\frac{x^3}{e^{3c}\lg(C+3)}+\ldots\ldots\frac{x^n}{e^{nc}\lg(C+n)}\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

функція трансценденталь-трансцендентная.

Въ самомъ дѣлѣ алгебраическое уравненіе

$$\Omega[e^c, \lg(C+1), \lg(C+2)\ldots\lg(C+p)]=0$$

должно сводиться къ

$$\sum_{j=1}^{j=p} A_j\lg(C+j)=0 \quad (18)$$

гдѣ A_j не зависитъ отъ C и отличны отъ нуля.

Но представляя равенство (18) въ видѣ

$$A_j\lg(C+j)=-A_1\lg(C+1)-A_2\lg(C+2)\ldots$$

полагая $C=-j$ убѣждаемся, что въ правой части конечная величина, а въ лѣвой безконечность.

Такимъ образомъ разложеніе (17) содержитъ безконечное множество трансцендентныхъ и потому принадлежитъ къ трансценденталь-трансцендентной функціи.

Разложеніе

$$y=1+\frac{x}{C_1+1}+\frac{x^2}{C^2{}_1+C_1+1}+\frac{x}{C_2+C^2{}_1+C_1+1}+$$

$$+\frac{x^4}{C^2{}_2+C_1+C^2{}_1+C_1+1}+\ldots\ldots$$

содержащее произвольныя постоянныя $C_1C_2C_3\ldots$ число которыхъ безконечно, тоже не можетъ представлять рѣшенія алгебраическаго дифференціальнаго уравненія.

Разложеніе

$$1+\frac{x\cs\frac{\pi}{1}}{1!}+\frac{x^2\cs\frac{\pi}{2}}{2!}+\frac{x^3\cs\frac{\pi}{3}}{3!}+\cdots\cdots\frac{x^n\cs\frac{\pi}{n}}{n!}+\cdots$$

тоже принадлежитъ трансцендենталь-трансцендентной функціи, такъ какъ степень неприводимаго уравненія опредѣленнаго $\cs\frac{\pi}{n}$ вмѣстѣ съ n безконечно возрастаетъ.

§ 4. Какъ въ § 4 нашей работы:

«О нѣкотрыхъ ариѳметическихъ свойствахъ и т. д.» мы дѣлимъ множители знаменателя a_n на группы:

I) Первая группа—множители меньше нѣкотораго конечнаго числа P, независимаго отъ n въ степеняхъ, показатели которыхъ меньше конечнаго числа Q, не зависящаго отъ n.

II) Вторая группа—множители меньше P, но съ показателями больше Q.

III) Третья группа—множители, большіе P.

Задавъ надлежащимъ образомъ P, Q, мы можемъ утверждать, что при различныхъ выраженіяхъ типа (14, 15) для a_n, число простыхъ множителей группъ II и III-ей остается неизмѣннымъ, показатели же множителей всѣхъ группъ будутъ измѣняться только на конечныя числа. Отсюда слѣдуетъ, какъ это доказано въ §§ 3, 6, 7 вышеупомянутой работы, что остаются также неизмѣнными числа k, l, при которыхъ конечны

$$\frac{p_n}{n^k} \quad \frac{\lambda_n(p)}{n^l}$$

при безконечномъ возрастаніи n (p_n наиб. простой множитель знаменателя a_n, $\lambda_n(p)$ показатель простого множителя въ знамен. a_n) или согласно терминологіи упомянутой работы остаются неизмѣнными свойства

$$P[k] \quad L[l] \quad A[k.\ l]$$

если таковыя свойства существуютъ для какой либо формы a_n.

При несоблюденіи условія $L[l]$ ни при какомъ l т. е. при условіи, что $\frac{\lambda_n(p)}{n^l}$ при конечномъ l всегда безконечно возрастаетъ вмѣстѣ съ n, a_n можетъ быть присуще слѣдующее свойство:

$$\frac{\lambda_n(p)}{\sigma^n},$$

гдѣ σ опредѣленное конечное число при возрастаніи n остается конечнымъ.

Такое свойство будемъ обозначать символомъ

$$M[\sigma]$$

Остается только повторить разсужденія §§ 3, 6, 7 упомянутой работы, чтобы убѣдиться, что это свойство остается неизмѣннымъ при всѣхъ формахъ типа (14, 15) для a_n.

Выводъ значеній h, l, σ для алгебраическаго дифференціальнаго уравненія общаго типа и для дифференціальныхъ уравненій частныхъ типовъ въ зависимости отъ порядка и степени уравненій будетъ нами дѣлаться лишь для случая раціональныхъ коэффиціентовъ голоморфнаго разложенія (1), при этомъ мы будемъ основываться:

1) на томъ, что свойства $P[k]$ $L[l]$ $M[\sigma]$ не зависятъ отъ взятой формы для a_n.

2) на свойствахъ цѣлыхъ чиселъ, перечисленныхъ въ § 2 и присущихъ также цѣлымъ R-функціямъ.

Въ виду этого наши результаты всегда обобщаются съ частнаго случая раціональныхъ a_0, $a_1 \ldots a_n$ на общій случай какихъ угодно a_0, $a_1 \ldots$

§ 5. Предположимъ теперь, что функція

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{1}$$

гдѣ a_i раціональны, удовлетворяетъ неприводимому алгебраическому дифференціальному уравненію

$$f(y^{(m)}, y^{(m-1)} \ldots y', y, x) = 0$$

порядка m и степени σ.

Коэффиціенты въ лѣвой части при ${y^{(n)}}^{h_n}{y^{(n-1)}}^{h_{n-1}}\ldots y^h$, x^h предполагаемъ цѣлыми числами.

Возьмемъ сперва простѣйшій случай, а именно тотъ, въ которомъ теорема Тейксейра вѣрна.

Именно предположимъ, что

$$v=\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\right]_{x=0} \lessgtr 0$$

Дифференцируя уравненіе (1), имѣемъ

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}y^{(m+1)}+\sum_{i=0}^{i=m-1}\frac{\partial f}{\partial y^{(i)}}y^{(i+1)}+\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

или

$$f_{m\cdot 1}y^{(m+1)}+f_{m+1\cdot 1}=0 \tag{20}$$

гдѣ

$$f_{m.1}=\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}$$

$$f_{m+1\cdot 1}=\sum_{i=0}^{i=m-1}\frac{\partial f}{\partial y^{(i)}}y^{(i+1)}+\frac{\partial f}{\partial x}$$

цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами

отъ

$$y^{(m)},\ y^{(m-1)},\ y^{(m-2)}\ldots y',\ y,\ x$$

Полагая $x=0$, имѣемъ

$$vy_0{}^{(m+1)}+f^{(0)}{}_{m+1\cdot 1}=0 \tag{20^0}$$

$$y_0{}^{(m+1)}=-\frac{f^{(0)}{}_{m+1\cdot 1}}{v} \tag{21_1}$$

Дифференцируя ур. $(20)_1$ еще разъ имѣемъ

$$f_{m\cdot 2}y^{(m+2)}+f_{m+1\cdot 2}=0 \tag{20_2}$$

гдѣ $f_{m\cdot 2}$, $f_{m+1\cdot 2}$ цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ $y^{(m+1)}$, $y^{(m)} \ldots y'$, y, x

$$f_{m\cdot 2} = f_{m\cdot 1} = \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}$$

При $x=0$ имѣемъ

$$y_0^{(m+2)} = -\frac{f^{(0)}{}_{m+1\cdot 2}}{v} \qquad (21)_2$$

гдѣ $f^{(0)}{}_{m+1\cdot 2}$ цѣлая функція съ цѣлыми коэффиціентами отъ

$$y_0^{(m+1)},\ y_0^{(m)} \ldots y'_0,\ y_0.$$

Кратное дифференцированіе даетъ

$$f^{(0)}{}_{m\cdot i}\ y^{(m+i)} + f_{m+1\cdot i} = 0$$

и

$$y_0^{(m+i)} = -\frac{f_{m+1\cdot i}}{v} \qquad (21)_i$$

гдѣ $f^{(0)}{}_{m+1\cdot i}$ цѣлая функція съ цѣлыми коэффиціентами отъ

$$y_0^{(m+i-1)},\ y_0^{(m+i-2)} \ldots\ y'_0,\ y_0.$$

Подставляя вмѣсто

$$y_0^{(m+1)},\ y_0^{(m+2)} \ldots y_0^{(m+i-1)}$$

ихъ выраженія въ

$$y_0^{(m)},\ y_0^{(m-1)},\ y_0^{(m-2)} \ldots\ y'_0,\ y_0$$

изъ уравненій $(21)_1$, $(21)_2 \ldots$ $(21)_{i-1}$, мы получаемъ для $y_0^{(m+i)}$ раціональную дробь, причемъ въ знаменатель $y_0^{(m+i)}$ могутъ войти только тѣ простые множители, которые входятъ или
1) въ знаменатели y_0, y'_0, $y''_0 \ldots$ $y_0^{(m)}$
2) въ числитель $v \ldots\ldots w$
и это утвержденіе будетъ вѣрно какъ бы велико ни было i или $n=m+i$.

Взявъ вмѣсто $y_0^{(n)}$ коэффиціентъ при x^n въ разложеніи (1)

$$a_n = \frac{y_0^{(n)}}{1.2\ldots n}$$

мы должны заключить, что, если D наименьшее краткое знаменателей

$$y_0,\ y'_0 \ldots\ y_0^{(m)},$$

то дѣлитель знаменателя a_n дѣлитъ

$$1.2\ldots n\ Dw^s \tag{22}$$

начиная съ достаточно большихъ значеній n и потому простой множитель, входящій въ знаменатель a_n не больше наибольшаго множителя въ произведеніи (22), т. е. не больше и

$$p_n \leqq n$$

и $\frac{p_n}{n}$ съ возрастаніемъ n остается конечнымъ или, согласно нашей терминологіи, разложенію (1) присуще свойство

$$P[1]$$

Къ этому свойству, отмѣченному Тейксейра, мы прибавляемъ еще другое, замѣняющее свойство $L[l]$, присущее разложеніямъ (1) удовлетворяющимъ дифференціальному уравненію.

Замѣтимъ, что, дифференцируя уравненіе

$$f(x,\ y,\ y' \ldots\ y^{(m)})=0 \tag{2}$$

мы не можемъ повысить степени лѣвой части уравненія относительно y и ея производныхъ. Въ самомъ дѣлѣ намъ приходится дифференцировать члены вида

$$A{y^{(m)}}^{h_n}{y^{(m-1)}}^{h_{n-1}}\ldots{y^{(i-1)}}^{h_{i+1}}{y^{(i)}}^{h_i}{y^{(i-1)}}^{h_{i-1}}\ldots{y'}^{h_1}.\,y^{h_0}x^h$$

что даетъ сумму членовъ типа

$$h_iA{y^{(n)}}^{h_n}{y^{(n-1)}}^{h_{n-1}}\ldots{y^{(i+1)}}^{h_{i+1}+1}{y^{(i)}}^{h_i-1}{y^{(i-1)}}^{h_{i-1}}\ldots{y'}^{h_1}y^{h_0}x^h$$

т. е. сумму членовъ той же степени, что первоначальный.

Если степень $f(x, y, y' \dots y^{(m)})$ есть σ, то обозначая черезъ δ степень, можно написать

$$\delta\,\frac{d^if}{dx^i} \leqq \delta\,\frac{d^{i-1}f}{dx^{i-1}} \dots \leqq \delta\,\frac{df}{dx} \leqq \delta f \leqq \sigma \tag{23}$$

и, какъ слѣдствіе,

$$\delta f_{m+1\cdot i} \leqq \delta\,\frac{d^if}{dx^i} \leqq \sigma \tag{24}$$

Возьмемъ какой нибудь простой множитель p, входящій въ знаменатель $y_0{}^{(m+i)}$ съ показателемъ h_{m+i}.

Этотъ множитель можетъ входить также въ знаменатели

$$y_0,\ y'_0,\ y''_0 \dots\ y_0{}^{(m+i-1)} \tag{25}$$

съ показателями

$$h_0,\ h_1,\ h_2 \dots\dots\ h_{m+i-1}. \tag{26}$$

Если $\overline{h}_{m+i-1}$ наибольшее изъ чиселъ (26), то, приводя дроби (25) къ одному знаменателю, содержащему p съ показателемъ $\overline{h}_{m+i-1}$, мы получаемъ согласно ур. $(21)_i$ $y_0{}^{(m+i)}$ въ видѣ дроби съ знаменателемъ, содержащимъ p съ показателемъ

$$h_{m+i} \leqq \overline{h}_{m+i-1}\ \delta f_{m+1\cdot i} \leqq \sigma\ \overline{h}_{m+i-1}$$

число $\overline{h}_{m+i}$ равно или h_{m+i} или $\overline{h}_{m+i-1}$.

Такъ какъ

$$h_{m+i-1} \leqq \sigma\,\overline{h}_{m+i-1}$$

$$\overline{h}_{m+i} \leqq \sigma\,\overline{h}_{m+i-1}$$

то

$$\overline{h}_{m+i} \leqq \sigma\,\overline{h}_{m+i-1}$$

Такимъ же образомъ:

$$\overline{h}_{m+i-1} \leqq \sigma\,\overline{h}_{m+i-2}$$

$$\overline{h}_{m+i-2} \leqq \sigma\,\overline{h}_{m+i-3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\overline{h}_{m+1} \leqq \sigma\,\overline{h}_m$$

и поэтому

$$\frac{h_{m+i}}{\sigma^{m+i}} \leqq \frac{\overline{h}_{m+i}}{\sigma^{m+i}} \leqq \frac{\overline{h}_m}{\sigma^m}$$

и $\frac{\lambda_n}{\sigma^n}$ сохраняетъ конечное значеніе при возрастаніи n.

Взявъ теперь коэффиціентъ a_n, будемъ имѣть

$$\lambda_n(p) \leqq \overline{h}_n + \lambda_n^{(1)}(p)$$

если $\lambda_n^{(1)}(p)$ показатель степени p въ $1.2\ldots n$. Но, какъ доказано въ упомянутой статьѣ [1]).

$$\lambda_n^{(1)}(p) < \frac{n}{p-1}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ правой части неравенства

$$\frac{\lambda_n(p)}{\sigma^n} \leqq \frac{\overline{h_n}}{\sigma^n} + \frac{\lambda^{(1)}{}_n(p)}{\sigma^n} \tag{27}$$

когда σ отлично отъ единицы

1) $\frac{h_n}{\sigma^n}$ сохраняетъ кон. величину

2) $\frac{\lambda_n^{(1)}(p)}{\sigma^n} < \frac{n}{\sigma^n}\,\frac{1}{p-1}$

въ виду того, что $\lim\limits_{n=\infty} \frac{n}{\sigma^n} = 0$ безконечно убываетъ.

Такимъ образомъ голоморфный рядъ

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x + \cdots\; a_{n-1} x^{n-1} + \cdots$$

удовлетворяющій неприводимому алгебраическому дифференціальному уравненію степени $\sigma > 1$ (т. е. нелинейному):

$$f(x,\, y,\, y' \ldots\, y^{(m)}) = 0 \tag{1}$$

причемъ

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\right]_0 \gtrless 0$$

---

[1]) Стр. 47.

обладаетъ помимо свойства $P(1)$ еще свойствомъ $M(\sigma)$, состоящимъ въ слѣдующемъ:

$$\frac{\lambda_n(p)}{\sigma^n}$$

гдѣ σ степень дифференціальнаго уравненія (1) сохраняетъ при безконечномъ возрастаніи n конечную величину.

Для множителей, не входящихъ въ знаменатели $a_0, a_1 \ldots a_{m-1}$ и въ числитель v т. е. для множителей достаточно большихъ (при надл. выборѣ P. Q III группы), будемъ имѣть свойство

$$L[1].$$

Эти множители не дѣля уже

$$Dw^s$$

должны дѣлить $1.2..n$.

Въ виду этого неравенство (27) замѣняется неравенствомъ

$$\frac{\lambda_n'(p)}{n} \leqq \frac{\lambda_n^{(1)}(p)}{n} < \frac{1}{p-1}$$

откуда слѣдуетъ что при $n=\infty$

$$\frac{\lambda_n(p)}{n}$$

конечно.

Для того, чтобы отмѣтить, что это свойство присуще только множителямъ III группы, будемъ обозначать его черезъ

$$L_n[1].$$

Совокупность свойствъ

$$P[k] \; M[\sigma] \; L_n[1]$$

будемъ обозначать

черезъ

$$A[k, l, \sigma].$$

Тогда можно сказать, что при

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\right]_0 \gtrless 0$$

имѣетъ мѣсто свойство

$$A[k, l, \sigma].$$

§ 6. Разсмотримъ теперь случай, когда

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\right]_0 = 0$$

Подставляя въ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y^{(m)}}$ разложеніе

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots a_{n-1} x^{n-1} + \ldots$$

имѣемъ въ томъ случаѣ, когда

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\right]_0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} = b_k x^k + b_{k+1} x^{k+1} + \ldots\ldots$$

k цѣлое конечное число не равное нулю.

$$b_k \gtrless 0$$

Въ самомъ дѣлѣ мы не можемъ имѣть

$$b_k = b_{k+1} = \ldots\ldots b_\infty = 0$$

ибо, иначе, мы имѣли бы

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} = 0 \tag{28}$$

и уравненіе (1), имѣя кратное относительно $y^{(m)}$ рѣшеніе, не было бы уже неприводимо.

Замѣтимъ теперь, что для того, чтобы при дифференцированіи цѣлой функціи отъ $y, y', y'' \ldots y^{(m)}$ получилась цѣлая функція, содержащая $y^{(m+i)}$, необходимо по меньшей мѣрѣ i—дифференцированій.

Для того же, чтобы $y^{(m+i)}$ вошло во второй или въ высшей степени необходимо не менѣе $2i$ дифференцированій.

Въ самомъ дѣлѣ дифференцированіемъ члена $f(x, y, y' \ldots y^{(m)})$ типа:

$$y^{(m)^{h}m} y^{(m-1)^{h}m-1} \ldots y'^{h_1} y^{h_0} x^h \tag{29}$$

можно или ввести только одну производную высшаго порядка или повысить только на единицу степень одной изъ входящихъ въ произведеніе (29) производныхъ.

Отсюда слѣдуетъ, что, если дифференцированіе лѣвой части уравненія (1) даетъ сумму, содержащую членъ

$$y^{k_0} y'^{k_1} \ldots y^{(m)^{k}m} y^{(m+1)^{k}m+1} \ldots y^{(m+i)}$$

то эта сумма можетъ дать членъ $[y^{(m+i)}]^2$ только послѣ i—дифференцированій. Для того, чтобы вошелъ членъ съ $y^{(m+i)}y^{(m+j)}$ необходимо $(i+j)$ дифферецированій.

Вслѣдствіе этого дифференцируя уравненіе

$$f(x, y, y' \ldots y^{(m)})=0 \ (1)$$

всего $2i$ раза имѣемъ

$$f_{m \cdot 2i} y^{(m+2i)} + f_{m+1 \cdot 2i} y^{(m+2i-1)} + \ldots f_{m+i-1 \cdot 2i} y^{(m+i+1)} +$$

$$+ f_{m+i \cdot 2i} = 0 \tag{30}$$

гдѣ $f_{j \cdot 2i}$ цѣлыя функціи отъ $x, y, y' \ldots y^{(m+i)}$ съ цѣлыми коэффиціентами.

Возьмемъ

$$i > k$$

такъ, что

$$m+i+1 \leqq m+2i-k$$

и положимъ для сокращенія

$$m+2i=p$$

Тогда уравненіе (30) можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$f_m y^{(p)} + f_{m-1} y^{(p-1)} + \ldots f_{m+k} y^{(p-k)} + f_{m+k+1.p} = 0 \qquad (30)$$

гдѣ

$$f_m, f_{m-1} \ldots f_{m+k}, f_{m+k+1.p}$$

цѣлыя функціи отъ

$$y, y', y'' \ldots y^{(p-k+1)} \qquad (32)_0$$

съ цѣлыми коэффиціентами.

Дифференцируя q разъ, имѣемъ:

$$f_m y^{(p+q)} + [f_{m+1} + q f^{(0)\prime}{}_m] y^{(p+q-1)} + \ldots [f_{m+k} +$$

$$+ q f'_{m+k+1} + \ldots \frac{q!}{k!} f_m{}^{(k)}]^{(p+q-k)} y + f_{m+q+k+1.p+q} = 0$$

Полагая же $x=0$, имѣемъ

$$f_m{}^{(0)} y_0{}^{(p+q)} + [f^{(0)}{}_{m+1} + q f_m{}^{(0)\prime}] y_0{}^{(p+q-1)} + \ldots \Big[f^{(0)}{}_{m+k} + q f^{(0)\prime}{}_{m+k-1} +$$

$$+ \ldots \frac{q!}{k!} f_m{}^{(0)k} \Big] y_0{}^{(p+q-k)} + f^{(0)}{}_{m+q+k+1.p+q} = 0$$

гдѣ коэффиціенты при

$$y_0{}^{(p+q)}, \; y_0{}^{(p+q-1)} \ldots \; . y_0{}^{(p+q-k)}$$

цѣлыя функціи отъ q.

Эти цѣлыя функціи не могутъ всѣ тожественно при всякомъ q равняться нулю, гдѣ коэффиціентъ при q^k въ цѣлой функціи, служащей коэффиціентомъ при $y_0{}^{(p+q-k)}$ равенъ

$$f_m{}^{(k)}(0) = [f_m{}^{(k)}]_{x=0} = b_k \gtrless 0.$$

Мы можемъ поэтому написать въ общемъ случаѣ

$$y_0{}^{(p+q-r)}(A_0 + A_1 q + \ldots A_r q^r) = F(y_0, y'_0 \ldots y_0{}^{(p+q-r-1)} \qquad (34)$$

$$0 < r \leq k$$

или же полагая $p+q-r=n$, начиная съ достаточно большихъ n

$$y_0^{(n)}=\frac{F(y_0,y'_0\ldots y_0^{(n-1)})}{\Phi(q)}, \tag{35}$$

гдѣ F цѣлая функція съ цѣлыми коэффиціентами отъ

$$y_0,\ y'_0\ldots\ldots y^{(n-1)}$$

$$\Phi(q)=A_0+A_1q+\ldots A_rq^r$$

A_i цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ величинъ

$$y_0,\ y'_0,\ y''_0\ldots y^{(p-k-1)} \tag{32}$$

и слѣдовательно не зависятъ отъ q

$\Phi(q)$ не равно нулю при всякомъ q

Взявъ q больше, чѣмъ высшій предѣлъ π положительныхъ корней уравненія

$$\Phi(q)=0$$

мы можемъ сказать, что при достаточно большомъ q или при достаточно большомъ $\Phi(q)$ не равно нулю.

Отсюда, заключаемъ, какъ въ § 5, что простые множители знаменателей a_n дѣлятъ

$$1.2.3\ldots nD\prod_{j=\pi}^{j=q}\psi(j)$$

здѣсь D наименьшее кратное знаменателей $(32)_0$

$$\Phi(j)=\frac{B_0+B_1q+\ldots B_rq^r}{B}=\frac{\psi(j)}{B}$$

гдѣ B, B_j цѣлыя числа

Простой множитель не можетъ быть болѣе наибольшаго изъ значеній

$$\psi(j)$$

$$\pi\leq j\leq q.$$

Но $\psi(j)$, начиная съ достаточно большого значенія j, постоянно возрастаетъ, поэтому если взять q достаточно большимъ, наибольшимъ значеніемъ $\psi(j)$ будетъ $\psi(q)$ и простой множитель будетъ не больше

$$\psi(q)=A_0+A_1q+\ldots A_rq^r.$$

Но при достаточно большомъ q

$$\psi(q)<q^{r+1}<q^{k+1}$$

поэтому простой множитель не болѣе q^{k+1} и тѣмъ самымъ и не больше n^{k+1}.

Мы получаемъ такимъ образомъ теорему Гурвича въ новой формулировкѣ, дающей возможность ее связать съ другими изслѣдованіями.

Голоморфный рядъ

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots a_{n-1}x^{n-1}+\ldots \qquad (1)$$

удовлетворяющій алгебраическому дифференціальному уравненію

$$f(x, y, y' \ldots y^{(m)})=0 \qquad (2)$$

для котораго

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\right]_{x=0}=0$$

при чемъ $x=0$ служитъ корнемъ кратности r для уравненія

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}=0$$

удовлетворяетъ условію $P[k+1]$, т. е. условію $\frac{p_n}{n^{k+1}}$ при безконечномъ возрастаніи n конечно.

Кромѣ того попутно нами доказано лемма, вытекающая изъ ур. (34), что $y_0^{(n)}$, начиная съ достаточно большихъ n выражается раціонально въ $y_{01}, y'_0, y''_0 \ldots y^{(n-1)}$ необходимая въ § 3.

Посмотримъ теперь, какимъ свойствомъ въ этомъ случаѣ обладаетъ $\lambda_n(p)$ показатель простого множителя, входящаго въ знаменатели a_0, a_1, $a_2 \ldots a_n \ldots$

Въ этомъ случаѣ $\delta F = \delta f$, откуда, какъ выше при

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\right]_0 \gtrless 0$$

убѣждаемся, что

$$\frac{\lambda_n}{\sigma^n}$$

при безконечномъ возрастаніи n остается конечно.

Но неравенство (27) слѣдуетъ замѣнить слѣдующимъ:

$$\frac{\lambda_n(p)}{\sigma^n} \leqq \frac{h_n}{\sigma^n} + \frac{\lambda^{(1)}{}_n(p)}{\sigma^n} + \frac{\lambda^{(2)}{}_n(p)}{\sigma^n} \tag{36}$$

$\lambda^{(2)}{}_n(p)$ показатель съ которымъ p входитъ въ

$$\prod_{j=\pi}^{j=q} \psi(j) \, .$$

Теорема § 5, относящаяся къ $\frac{\lambda_n(p)}{\sigma^n}$, обобщится и на изслѣдуемый случай, если будетъ доказано, что

$$\frac{\lambda^{(2)}{}_n(p)}{\sigma^n}$$

при безконечномъ возрастаніи n конечно. Замѣтимъ съ этой цѣлью, что

$$\prod_{j=\pi}^{j=q} \psi(j) \leqq \psi(q)!$$

Но показатель степени p дѣлящей $\psi(q)!$

не больше $\frac{\psi(q)}{p-1}$,

слѣдовательно

$$\frac{\lambda_n^{(2)}(p)}{\sigma^n} \leq \frac{\psi(q)}{(p-1)\sigma^n} \tag{37}$$

Но

$$\lim_{n=\infty} \frac{\psi(q)}{\sigma^n} = \lim_{n=\infty} \frac{B_0 n^r + \ldots}{\sigma^n} = 0.$$

Откуда слѣдуетъ, что $\frac{\lambda^{(2)}{}_n(p)}{\sigma^n}$ стремится къ нулю.

Поэтому согласно нер. (36) $\frac{\lambda_n(p)}{\sigma^n}$ при безконечномъ возрастанiи n сохраняетъ конечное значенiе.

Такимъ образомъ.

Голоморфному разложенiю

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_{n-1} x^{n-1} + \ldots \tag{1}$$

удовлетворяющему алгебраическому дифференцiальному уравненiю

$$f(x, y, y' \ldots y^{(m)}) = 0$$

всегда присуще свойство

$$M[\sigma].$$

При достаточно большомъ множителѣ p (т.-е. при множителѣ 3-ей группы) неравенство (36) можемъ замѣнить болѣе простымъ

$$\frac{\lambda_n(p)}{n^k} \leq \frac{\lambda^{(1)}{}_n(p)}{n^k} + \frac{\lambda^{(2)}{}_n(p)}{n^k}, \tag{37}$$

$$k > 1$$

изъ котораго въ виду того, что

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda^{(1)}{}_n(p)}{n_k} = 0$$

$$\frac{\lambda^{(2)}{}_n(p)}{n^k} = \frac{B_0 n^r + \ldots}{n^k}$$

$$r \leq k$$

при безконечномъ возрастанiи n конечно.

Отсюда слѣдуетъ, что разложенiю (1) еще присуще свойство

$$L_n[k]$$

Совокупность всѣхъ трехъ доказанныхъ свойствъ можемъ обозначить символомъ

$$A[k+1,\ k,\ \sigma].$$

§ 7. Приведемъ нѣсколько примѣровъ функцій, трансценденталь-трансцендентность которыхъ вытекаетъ изъ доказаннаго въ предыдущемъ § 6.

Такъ функція

$$y=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^n}{(\alpha n+\beta)^{\gamma^r}}$$

α, β цѣлыя числа, $D(\alpha, \beta)=1$

трансценденталь-трансцендентна, вслѣдствіе несоблюденія условія $L_n\ [k]$.

Въ самомъ дѣлѣ форма $\alpha n+\beta$ [1]) содержитъ безконечное множество простыхъ чиселъ.

Взявъ для n тѣ значенія:

$$n_1, n_2, n_3 \ldots\ldots n_v$$

при которыхъ $\alpha n+\beta$ простыя числа, мы будемъ имѣть

$$\lambda_n(p_n)=\gamma^n$$

и $\dfrac{\gamma^n}{n^k}$ каково бы ни было k, будетъ вмѣстѣ съ n безконечно возрастать.

Функція

$$y=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^n}{(an^2+2bn+c)^{\gamma^n}}$$

гдѣ

$$\Delta=ac-b^2>0,\quad D(a, b, c)=1$$

---

1) *Dirichlet-Dedekind*. Vorlesungen über Zahlentheorie. Supplement. VI. S. 342.

тоже представляетъ трансценденталь—трансцендентную функцію, вслѣдствіе несоблюденія условія L_n (k), такъ какъ [1])

$$an^2+2bn+c$$

содержитъ тоже безконечное число простыхъ чиселъ.

Функція

$$y=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^n}{\alpha^{n!}}$$

гдѣ α цѣлое положительное число функція трансценденталь—трансцендентная вслѣдствіе несоблюденія условія $M[\sigma]$.
Въ самомъ дѣлѣ здѣсь

$$\lambda_n(p)=1.2.3\ldots n$$

а

$$\lim_{n=\infty}\frac{1.2.3\ldots.n}{\sigma^n}=\infty$$

каково бы ни было σ.

Гурвицъ приводитъ примѣръ трансценденталь—трансцендентной функціи, не выполняющей условія $P[k]$ ни при какомъ k.

Это функція

$$y=\sum\frac{\alpha^n}{n^{n}!}$$

Такъ какъ между границами [2])

$$n^{n-1}\quad 2n^{n-1}$$

---

[1]) *Weber.* Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen fähig ist (Math. Annalen Bd 20).
[2]) *Bertrand.* Journal de l'école Polytechnique ch. XXX.
Чебышевъ. Mémoire sur les nombres premiers. Mémoires présentés à l'Académie des sciences de St.-Petersbourg VII 1854 p. 17—33. Journal de Liouville I Série, XVII, 1852, p. 366—390. Сочиненія т. I стр. 49.

всегда заключается простое число, то

$$n^{n-1} \lesseqgtr p_n$$

$$n^{n-k-1} \lesseqgtr \frac{p_n}{n^k}.$$

Такъ какъ при достаточно большомъ n,

$$n-k-1>0$$

то $\frac{p^n}{n^k}$, каково бы ни было k, при возрастанiи n можетъ быть сдѣлано больше всякой данной величины. Такимъ образомъ условiе $P[k]$ ни при какомъ k не соблюдается.

§ 8. Всѣ доказанныя въ §§ 5, 6 теоремы на основанiи § 4 обобщаются сейчасъ же съ частнаго случая, когда a_i рацiональны, а коэффицiенты въ $f(x, y, y' \ldots y^{(m)})$ цѣлые, на общiй случай.

1) какихъ угодно коэффицiентовъ a_i и 2) какихъ угодно коэффицiентовъ въ дифференцiальномъ уравненiи, опредѣляющемъ y.

Можно сказать, что всякому разложенiю

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_{n-1}x^{n-1}+\cdots \tag{1}$$

удовлетворяющему алгебраическому дифференцiальному уравненiю

$$f(x, y, y' \ldots y^{(m)})=0 \tag{2}$$

необходимо присуще свойство

$$A[k+1,\ l, \sigma]$$

гдѣ k, σ нѣкоторыя опредѣленныя конечныя цѣлыя числа.

Но здѣсь σ представляетъ не степень неприводимаго дифференцiальнаго уравненiя

$$f(x, y, y' \ldots y^{(m)})=0 \tag{2}$$

гдѣ коэффицiенты при $y^h y'^{h_1} y''^{h_2} \ldots y^{(m)^{hm}}$ цѣлыя функцiи отъ x, а коэффиціенты этихъ цѣлыхъ функцій какія угодно числа, но степень уравненія

$$F(x, y, y' \ldots y^{(m)})=0 \tag{3}$$

гдѣ эти послѣдніе уже цѣлыя R—функціи, къ которому приводится (согласно § 3) уравненіе (2), k представляетъ порядокъ кратности корня $x=0$ уравненія

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(m)}}=0 \tag{38}$$

если только $x=0$ корень этого уравненія, въ противномъ случаѣ $k=0$.

$l=k$, если $x=0$ корень уравненія (38) и $l=1$ въ противномъ случаѣ.

Численный простой множитель замѣняется простымъ R—множителемъ, опредѣленіе котораго и свойства упомянуты въ § 2.

Такимъ образомъ, раскрывая значеніе символа

$$A[k+1, \; l, \sigma]$$

можемъ сказать, что если p_n наибольшій простой R—множитель въ знаменателѣ a_n, то при безконечномъ возрастаніи n $\frac{p_n}{n^{k+1}}$ остается конечно; если p какой угодно простой R—множитель $\lambda_n(p)$ показатель степени λ, дѣлящей знаменатель a_n, то $\frac{\lambda_n(p)}{\sigma^n}$ остается тоже конечнымъ, наконецъ, если p^n достаточно большой R—множитель, то $\frac{\lambda_n(p)}{n^l}$ $l=1$, k остается конечнымъ.

При этомъ конечность R—функцій понимается согласно опредѣленію 6) § 2.

Для дальнѣйшаго слѣдуетъ имѣть въ особенности въ виду, что p_n, дѣля произведеніе $n!\, D\Pi\psi(j)$ цѣлыхъ R—функцій конечныхъ (и поэтому конечной опредѣленной степени) должна быть тоже цѣлой R— функціей конечной степени.

§ 9. Извѣстно, что функція

$$y=F(\alpha, \beta, \gamma, x)=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\ \beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2.3\ldots n.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n+\cdots$$

опредѣляемая гипергеометрическимъ рядомъ, удовлетворяетъ линейному дифференціальному уравненію:

$$(x^2-x)y''+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]y'+\alpha\beta y=0$$

каковы бы ни были α, β, γ.

Извѣстно слѣдующее обобщеніе гипергеометрическаго ряда, принадлежащее Гейнэ (и развитое еще дальше Томэ [2])

$$y=\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)=1+\frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)}x+$$

$$+\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)\ (1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}x^2+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\ldots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})\ldots)(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{n-1})(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})\ldots(1-q^{\gamma+n-1})}x^n+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Интереснымъ является рѣшить слѣдующій вопросъ, существуетъ ли дифференціальное алгебраическое уравненіе, опредѣляющее y при всякомъ α, β, γ, q?

Если α, β, γ, q произвольны, то независимыми произвольными являются

$$\theta=q^\alpha, \quad \eta=q^\beta, \quad \zeta=q^\gamma, \quad q$$

$$y=1+\frac{(1-\theta)(1-\eta)}{(1-q)(1-\zeta)}x+\frac{(1-\theta)(1-\theta q)(1-\eta)(1-\eta q)}{(1-q)(1-q^2)(1-\zeta)(1-\zeta q)}x^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(1-\theta)(1-\theta q)\ldots(1-\theta q^{n-1})(1-\eta)(1-\eta q)\ldots(1-\eta q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{n-1})(1-\zeta)(1-\zeta q)\ldots(1-\zeta q^{n-1})}x^n+\cdots$$

---

[1]) *Heine.*
Journal de Crelle. t. 32.

[2]) *Thomae.* Les séries heinéennes supérieures. Brioschi Ann. (2) V 105—138 p. 1871 г.

При произвольныхъ θ, η, ζ числители и знаменатели коэффиціентовъ x^n несократимы.

Но тогда, взявъ R—множителя $1-\zeta q^{n-1}$ наивысшей относительно ζ, q степени, мы можемъ его признать наибольшимъ.

Степень его вмѣстѣ съ n безконечно возрастаетъ. Отсюда слѣдуетъ невозможность опредѣленія y при всякихъ θ, η, ζ, q т.-е. при всякихъ α, β, γ, q алгебраическимъ дифференціальнымъ уравненіемъ.

Въ общемъ случаѣ Гейневская функція трансценденталь-трансцендентна.

Если α, β, γ алгебраическія числа, q произвольно, то можно сказать, что Гейневская функція и при этомъ ограниченіи будетъ вообще функціей трансценденталь-трансцендентной.

Взявъ α, β, γ цѣлыми числами отличными между собой и полагая

$$\gamma > \beta > \alpha$$

легко доказываемъ существованіе неразложимаго множителя безконечно возрастающей вмѣстѣ съ n степени.

Въ самомъ дѣлѣ $1-q^{\gamma+n-1}$ мы разлагаемъ на множители

$$1)\quad 1-q$$

$$2)\quad 1+q^2+q^3+\cdots q^{\gamma+n-2}$$

Взявъ для n значенія $n_1, n_2 \ldots n_v \ldots$, при которыхъ $\gamma+n-1$ простое число, мы на основаніи извѣстной теоремы Гаусса должны признать второй множитель неразложимымъ въ области цѣлыхъ чиселъ, т.-е. простымъ R—множителемъ, при чемъ при сдѣланномъ выше предположеніи невозможно сокращеніе на него коэффиціента.

Но по мѣрѣ возрастанія n при полученіи значенія:

$$n_1, n_2, n_3 \ldots n_v$$

степень $\gamma+n-2$ будетъ безконечно возрастать, откуда заключаемъ о трансценденталь-трансцендентности Гейневскаго ряда.

Приведемъ еще примѣры трансценденталь-трансцендентныхъ функцій.

Нарушеніе условія $P[k]$

$$y=1+\frac{x}{(1+q)}+\frac{x^2 2!}{(1+q)(1+2!q)}+\frac{x^3}{(1+q)(1+2!q)(1+3!q)}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{x^n}{(1+q)(1+2!q)(1+3!q)\ldots\ldots(1+n!q)}+\ldots\ldots \qquad (40)$$

За наибольшій простой R—множитель слѣдуетъ признать

$$1+n!q$$

Но $\frac{1+n!q}{n^k}$ ни при какомъ k не можетъ представлять конечную R—функцію для безконечныхъ значеній n.

Это слѣдуетъ изъ извѣстной формулы Стирлинга

$$n!=n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}(1+\varepsilon_n)$$

гдѣ ε_n безконечно убываетъ съ возрастаніемъ n

$$\frac{n!}{n^k}=\frac{n^{n-k}}{e^n}\sqrt{2n\pi}(1+\varepsilon_n)$$

въ виду того, что $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{n}{e}\right)^n=\infty$

и

$$\lim_{n=\infty}\frac{n!}{n^k}=\infty$$

каково бы ни было n.

Такимъ образомъ y представляетъ трансценденталь-трансцендентную функцію.

Нарушеніе условія

$$M[\sigma]$$

Примѣромъ трансценденталь-трансцендентной функціи можетъ служить

$$y=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^n}{\alpha^{n!}}$$

гдѣ α цѣлая R—функція.

Нарушеніе условія

$$L_n[l]$$

Примѣромъ можетъ служить

$$y=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^n}{(1-q^{\alpha})^{\gamma^n}} \tag{41}$$

гдѣ α, γ цѣлыя положительныя числа, q произвольное постоянное или трансцендентная.

§ 10. Всякая функція выражаемая [1]) въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ основныхъ трансцендентныхъ функцій, т.-е. функцій логариѳмическихъ, показательныхъ, тригонометрическихъ и круговыхъ, удовлетворяетъ алгебраическому дифференціальному уравненію

$$f(x, y, y' \dots . y^{(m)})=0 \tag{2}$$

Въ самомъ дѣлѣ полагая

$$y=\pi(\theta_1^{(q)}\theta_2^{(q)}\dots . x) \tag{42}$$

гдѣ π алгебраическая функція основныхъ трансцендентныхъ q-го класса и основныхъ трансцендентныхъ низшихъ классовъ

$$\theta_i^{(q)}=\lg\alpha_i^{(q-1)}(x),\quad e^{\beta_i^{(q-1)}(x)},\quad [\gamma_i^{(q)}(x)]^{\lambda_i^{(q-1)}},$$

гдѣ $\alpha_i^{(q-1)}(x), \beta_i^{(q-1)}(x), \gamma_i^{(q-1)}(x)$ трансцендентальныя $\overline{q}$—1-го

---

1) См. въ „Объ интегрированіи линейныхъ дифф. уравненій“ постановку понятія объ интегр. въ конечномъ видѣ.

класса, иначе говоря, алгебраическія функціи отъ основныхъ трансцендентныхъ $\overline{q-1}$-го класса и низшихъ классовъ:

$$\theta_1^{(q-1)},\ \theta_2^{(q-1)}\dots\dots$$

$$\theta_i^{(q-1)}=\lg\alpha_i^{(q-2)}(x),\ e^{\beta_i^{(q-2)}(x)},\ [\gamma_i^{(q-2)}(x)]^{\lambda_i^{(q-1)}}$$

гдѣ $\alpha_i^{(q-2)}(x)$, $\beta_i^{(q-2)}(x)$, $\gamma_i^{(q-2)}(x)$ трансцендентныя $\overline{q-2}$-го класса и т. д.

Въ нашей работѣ: «Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій» [1]) нами доказано, что

$$\frac{d\pi}{dx}$$

построена въ той же области трансцендентныхъ, что π, т.-е.

$$y'=\pi_1(\theta_1^{(q)},\ \theta_2^{(q)}\dots\theta_n^{(q)},\theta_1^{(q-1)},\ \theta_2^{(q-1)}\dots\theta_s^{(q-1)}\dots\dots,x) \quad (42)_1$$

Такимъ же образомъ находимъ

$$y''=\pi_2(\theta_1^{(q)},\theta_2^{(q)}\dots\theta_\nu^{(q)}\,\theta_1^{(q-1)},\theta_2^{(q-1)}\dots\ \theta_s^{(q-1)}\dots x) \quad (42)_2$$

....

$$y^{(m)}=\pi_m(\theta_1^{(q)},\theta_2^{(q)}\dots\theta_\nu^{(q-1)},\ \theta_1^{(q-1)},\ \theta_2^{(q-1)}\dots\theta_s^{(q-1)}\dots x) \quad (4_2)_m$$

исключая изъ этихъ уравненій основныя трансцендентныя, получаемъ алгебраическое дифференціальное уравненіе:

$$f(x,y,y',y''\dots\dots y^{(m)})=0 \qquad (2)$$

Возьмемъ для примѣра трансцендентную функцію 2-го класса.

$$y=e^x\lg\mathrm{cs}x$$

---

[1]) Извѣстія Варшавскаго Университета за 1909 годъ, часть 1, § 7 стр. 20.

Дифференцированіе даетъ намъ

$$y'=e^x[\lg\mathrm{cs}x-\mathrm{tg}x]$$

$$y''=e^x\left[\lg\mathrm{cs}x-2\mathrm{tg}x-\frac{1}{\mathrm{cs}^2x}\right]$$

$$y'''=e^x\left[\lg\mathrm{cs}x-3\mathrm{tg}x-\frac{3}{\mathrm{cs}^2x}+\frac{2\sin x}{\mathrm{cs}^3x}\right]$$

Отсюда

$$y-y'=e^x\mathrm{tg}x$$

$$y''=y-2(y-y')-e^x\frac{1}{\mathrm{cs}^2x}$$

$$y'''=y-3(y-y')-e^x\frac{3}{\mathrm{cs}^2x}+2e^x\mathrm{tg}x\frac{1}{\mathrm{cs}^2x}$$

Исключая отсюда $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{cs}x$, e^x, имѣемъ

$$y-y'(-3+2y+3y'-3y''+y''')[2(-y+2y'-y'')^2-(y-y')$$
$$(-3+2y+3y'-3y''+y''')]=4(y-y')$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема: *если функція y опредѣляемая голоморфнымъ разложеніемъ*

$$y=a_0+a_1x+a_2x+\cdots a_{n-1}x^{n-1}+\cdots \tag{1}$$

можетъ быть построена въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ, то разложеніе (1) *обладаетъ для нѣкоторыхъ конечныхъ чиселъ k, l, σ свойствами.*

$$P[k] \quad L_n[l] \quad M[\sigma]$$

Раскрывая значеніе перваго символа, слѣдуетъ сказать, что для нѣкотораго конечнаго числа k

$$\frac{p_n}{n^k}$$

съ возрастаніемъ n остается конечно.

Чебышевъ, по словамъ Эрмита [1]), высказалъ теорему, по которой не $\frac{p_n}{n^k}$, а $\frac{p_n}{n}$ остается конечно. Утвержденіе Чебышева вѣрно почти всегда, такъ какъ согласно § 5, k вообще равно 1 и только для критическаго случая, когда

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\right]_0 = 0$$

оно можетъ оказаться больше 1.

Вмѣсто выраженія, построеннаго въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ функцій, мы можемъ взять функціи [2]) $[ab_i^{(1)}]$, т.-е. функціи, опредѣляемыя Абелевыми интегралами

$$\int F(\xi_i^{(1)}, \eta_i^{(1)}) d\xi_i^{(1)}$$

Теорема обобщается на этотъ случай, ибо свойство $\frac{d\pi}{dx}$, изъ котораго мы исходили при нашемъ доказательствѣ, остается въ силѣ и y опредѣляется и въ этомъ случаѣ алгебраическимъ дифф. уравненіемъ (2).

Обобщеніе идетъ еще дальше: $[ab_i^{(j)}]$ можемъ замѣнить

$$\underset{me}{[ab_i^{(j)}]}, \quad \frac{d\underset{me}{[ab_i^{(j)}]}}{dx} \cdots \frac{d^{m-1}\underset{me}{[ab_i^{(j)}]}}{dx^{m-1}}$$

гдѣ $\underset{ml}{[ab_i^{(j)}]}$ опредѣляется алгебраическимъ дифференціальнымъ уравненіемъ порядка m и степени l

$$f\left[\frac{d^m \underset{ml}{[ab_i^{(j)}]}}{d\xi^m}, \frac{d^{m-1}\underset{ml}{[ab_i^{(j)}]}}{d\xi^{m-1}} \cdots \underset{ml}{[ab_i^{(j)}]}\right] = 0$$

---

[1]) *Hermite* Cours d'Analyse.

[2]) *Д. Мордухай-Болтовской.* Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій § 8 стр. 22.

§ 11. Если вмѣсто алгебраическаго уравненія (2) возьмемъ трансцендентное, предполагая, что коэффиціенты при

$$y^{h_0}y'^{h_1}y''^{h_2}\dots y^{(m)^{h_n}}$$

представляютъ трансцендентныя функціи отъ x, выражаемыя съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ (функцій $[elm]$) или съ помощью $[ab_i]$, то дифференцированіемъ получаемъ

$$f(x, \theta_1, \theta_2\dots\theta_q, y, y'\dots y^{(m)})=0$$

$$f_1(x, \theta_1, \theta_2\dots\theta_q, y, y'\dots y^{(m+1)})=0$$

$$f_2(x, \theta_1, \theta_2,\dots\theta_q, y, y'\dots y^{(m+2)})=\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_m(x, \theta_1, \theta_2\dots\theta_q, y, y'\dots y^{(m)})=0$$

Исключая трансцендентныя $\theta_1, \theta_2, \theta_3\dots\theta_q$, получаемъ алгебраическое дифференціальное уравненіе

$$\Omega(x, y, y'\dots\dots y^{(m)})=0$$

Такимъ образомъ функція трансценденталь-трансцендентная, не удовлетворяя алгебраическимъ диффер. уравненіямъ, не удовлетворяетъ и трансцендентнымъ относительно x, предполагая только, что лѣвая часть ур. построена въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ.

Таковы уравненія

$$y''y'-\sin xy'^2+e^xy=0$$

$$y'''^2\lg x-y^3y''^2+\mathrm{arctg}\, xy^3=0$$

и т. д.

Для полученія алгебраическаго дифференціальнаго уравненія, которымъ можетъ быть замѣнено первое изъ этихъ уравненій, можно исключить

$$\sin x \quad \mathrm{cs}\, x \quad e^x$$

изъ уравненій

$$y''y'-\sin xy'^2+e^xy$$

$$y'''y'+y''^2-\mathrm{cs}x[y'+y''\mathrm{cs}x]y'+e^x(y+y')=0$$

$$y^{(\mathrm{IV})}y'+3y''y'''-\sin x[y'+y''\mathrm{cs}x]y'-$$

$$-\mathrm{cs}x[2y'y''+(y'y'''\div y''^2)\mathrm{cs}x-y'y''\sin x]+$$

$$+e^x(y+2y'+y'')=0$$

$$\mathrm{cs}^2x+\sin^2x=1$$

Откуда получаемъ уравненіе 4-го порядка.

Если мы возьмемъ уравненіе трансцендентное, какъ относительно x, такъ и относительно $y, y' \ldots y^{(m)}$, то опять докажемъ, что всякое его рѣшеніе будетъ рѣшеніемъ алгебраическаго дифференціальнаго уравненія, если лѣвая часть его выражена въ конечномъ видѣ съ помощью

$$x, y, y' \ldots y^{(m)}$$

Такъ уравненіе

$$e^xy+\sin y'=0 \tag{43}$$

даетъ по дифференцированіи

$$e^x(y+y')+y''\mathrm{cs}y'=0 \tag{44}$$

$$e^x(y+2y'+y'')-\sin y'y''^2+y'''\mathrm{cs}y'=0 \tag{45}$$

Присоединяя къ этимъ уравненіямъ еще уравненіе

$$\mathrm{cs}^2y'+\sin^2y'=1 \tag{46}$$

Исключая изъ уравненій (43) (44) (45) (46)

$$e^x, \sin y', \mathrm{cs}y'$$

получаемъ алгебраическое дифференціальное уравненіе 2-го порядка.

§ 12. Подъ *алгеброидомъ* мы разумѣемъ функцію, опредѣляемую разложеніемъ

$$y=\sum_{j=-\mu}^{j=\infty} a_j(x-x_0)^{\frac{j}{d}} \tag{47}$$

гдѣ a_j постоянныя; причемъ принимается, что

$$(x-\infty)=\frac{1}{x}$$

Можно доказать, что всякій алгеброидъ, удовлетворяющій алгебраическому дифференціальному уравненію, обладаетъ свойствами

$$P[k+1] \quad L_n[l] \quad M[\sigma]$$

Чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно привести алгебраическое дифференціальное уравненіе

$$f(x, y, y' \dots y^{(m)})=0 \tag{48}$$

которому удовлетворяетъ алгеброидъ (47) подстановками

$$(x-x_0)^{\frac{1}{d}}=t \quad (x-x_0)^{\frac{\mu}{d}}y=z \tag{49}$$

къ алгебраическому дифф. уравненію

$$\mathrm{F}(t, z_t, z'_t \dots z_t^{(m)})=0 \tag{50}$$

лѣвая часть котораго содержитъ или тоже число трансцендентныхъ или произв. постоянныхъ, что лѣвая часть ур. (48) или на 1 больше (если x_0 трансцендентное или произвольно постоянное).

Для рѣшенія z уравненія (50) будемъ имѣть голоморфное разложеніе:

$$y=b_0+b_1t+b_2t^2+\dots b_{n-1}t^{n-1}+\dots \tag{51}$$

$$b_j=a_{-\mu+j}$$

Если q_n наибольшій множитель знаменателя b_n, то $\frac{q_n}{n^{k+1}}$ конечно при безк. возрастаніи n.

Но

$$q_n=p_{-\mu+n}$$

$$\frac{p_{n-\mu}}{(n-\mu)^{k+1}}=\frac{p_{n-\mu}}{n^{n+1}}\left(\frac{n}{n-\mu}\right)^{k+1}=\frac{q_n}{n^{n+1}}\left(\frac{n}{n-\mu}\right)^{n+1}$$

конечно, такъ какъ $\lim\limits_{n=\infty}\frac{n}{n-\mu}=1$.

Совершенно также, имѣя въ виду, что

$$\frac{\lambda_{n-\mu}(p)}{(n-\mu)^l}=\frac{\lambda_{n-\mu}(p)}{n^l}\left(\frac{n}{n-\mu}\right)^l=\frac{\lambda_n(q)}{n^l}\left(\frac{n}{n-\mu}\right)^l$$

$$\frac{\lambda_{n-\mu}(p)}{\sigma^{n-\mu}}=\frac{\lambda_n(q)}{\sigma^n}\sigma^{\mu}$$

доказываемъ и другія два свойства L_n $[l]$ M (σ).

§ 13. Разложеніе типа

$$y=\frac{P_0+\theta P_1+\theta^2P_2+\ldots\theta^{k-1}P_{k-1}}{Q_0+\theta Q_1+\theta^2Q_2+\ldots\theta^{k-1}Q_{k-1}} \tag{52}$$

гдѣ θ трансцендентныя съ $x=x_0$, какъ существенно-особенной точкой, P_i алгеброиды, представляетъ разложеніе, не приводящееся къ алгеброиду.

Ибо, если бы мы получили

$$\frac{P_0+\theta P_1+\ldots\theta^{k-1}P_{k-1}}{Q_0+\theta Q_1+\ldots\theta^{k-1}Q_{k-1}}=\text{алгеброиду}$$

мы могли бы разрѣшивъ это уравненіе относительно θ, получить θ въ формѣ алгеброида. Примѣромъ разложенія (52) можетъ служить разложеніе регулярнаго интеграла линейнаго уравненія. Здѣсь $\theta=\lg(x-x_0)$.

Можно сказать, что всякій неалгеброидъ Θ (назовемъ его *трансцендоидъ*) не можетъ опредѣляться уравненіемъ

$$\Omega\ [\Theta]=0 \tag{53}$$

съ алгеброидальными коэффиціентами, или что всякое равенство (53) тожественно относительно Θ и остается въ силѣ по замѣнѣ Θ какой угодно величиной.

Основываясь на этихъ свойствахъ алгеброидовъ и трансцендоидовъ въ нашей работѣ: „объ интегрированіи въ конечномъ видѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій", мы указываемъ слѣдующія свойства трансцендоидовъ I и II типовъ, т. е. такихъ, что

$$\frac{d\zeta}{dx}=\text{алгеброидъ}\qquad\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=\text{алгеброидъ}. \tag{54}$$

Всякое алгеброидальное уравненіе между трансцендоидами двухъ типовъ $\zeta . \eta$ остается въ силѣ по замѣнѣ трансцендоидовъ одного типа и равносильно уравненію одного изъ типовъ:

$$\sum C_i \zeta_i = A \tag{55}$$

$$\Pi \eta^{C_i} = A \tag{56}$$

C_i постоянныя, A алгеброидъ.

Отсюда легко видѣть, что между

$$\lg (x-x_0),\ e^{\frac{1}{x-x_0}},\ e^{\frac{1}{(x-x_0)^2}} \dots e^{\frac{1}{(x-x_0)^n}}$$

не можетъ быть алгеброидальнаго уравненія.

Эти свойства алгеброидовъ и трансцендоидовъ позволяютъ намъ доказать, что, если

$$y = \frac{P_0 + \theta P_1 + \dots \theta^{k-1} P_{k-1}}{Q_0 + \theta Q_1 + \dots \theta^{k-1} Q_{k-1}} \tag{52}$$

гдѣ θ трансцендоидъ I или II типа, т. е. обладающій однимъ изъ свойствъ (54),

$$P_i,\ Q_i$$

алгеброиды, то послѣднимъ присущи свойства

$$A\ [k,\ l,\ \sigma]$$

Въ самомъ дѣлѣ, подставляя въ алгебраическое дифференціальное уравненіе

$$f\ (x,\ y,\ y' \dots y^{(m)}) = 0 \tag{2}$$

выраженіе (52) для y, получаемъ уравненіе

$$\Omega[P_0,\ P_0' \dots P^{(m)},\ Q_0,\ Q'_0, \dots Q^{(m)} \dots P_i,\ P'_i \dots P_i^{(m)},$$

$$Q_i,\ Q'_i \dots Q_i^{(m)},\ \theta] = 0 \tag{57}$$

гдѣ Ω цѣлая функція величинъ, заключенныхъ въ скобки съ цѣлыми относительно x коэффиціентами. Приравнивая нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ θ въ виду тожественнаго ур. (51) относительно θ, получаемъ систему уравненій:

$$\mathrm{A}_i\,(P_0,\ P'_0\ldots P^{(m)}{}_0,\ Q_0,\ Q'_0\ldots Q^{(m)}{}_0\ldots P_i,\ P'_i\ldots P_i{}^{(m)},$$

$$Q_i,\ Q'_i\ldots Q_i{}^{(m)})=0 \tag{58}$$

представляющихъ необходимыя и достаточныя условія, чтобы выраженіе (52) удовлетворяло алгебраическому дифференціальному уравненію (57). Если уравненія (58) совмѣстны, то они даютъ для каждаго алгеброида алгебраическое дифференціальное уравненіе

$$F_j\ (P_j,\ P_j\ldots P^{(t_j)})=0 \tag{59'}$$

$$\mathrm{H}_j\ (Q_j,\ Q_j\ldots Q^{(s_j)})=0 \tag{59''}$$

ибо иначе одна или нѣсколько изъ функцій P_j, Q_j оставались бы произвольными и рѣшеніе обыкновеннаго уравненія (2) содержало бы произвольныя функціи.

Но изъ ур. (59′) и (59″) заключаемъ о свойствахъ $\mathrm{A}[k, l, \sigma]$ функцій. Конечно въ этомъ случаѣ значеніе чиселъ k, l, σ иное, чѣмъ въ случаѣ y алгеброида § 14. Укажемъ еще на одно интересное обобщеніе нашихъ изслѣдованій.

Дифференціальное уравненіе

$$f\ (x,\ y,\ y'\ldots y^{(m)})=0 \tag{2}$$

алгебраическое, т. е. съ коэффиціентами при

$$y^{h_0}\ \ y'^{h_1}\ldots y^{(m)\ h_m}$$

равными цѣлымъ функціямъ отъ x съ коэффиціентами цѣлыми или цѣлыми R—функціями можно замѣнить *алгеброидальнымъ* дифференціальнымъ уравненіемъ, т. е. съ коэффиціентами, равными алгеброидамъ, удовлетворяющимъ условіямъ

$$A\ [k_i{}^{(0)},\ l_i{}^{(0)},\ \sigma_i{}^{(0)}].$$

Приводя для этого случая разсужденія, аналогичныя изложеннымъ въ §§ 5, 6, и опираясь на свойство, которое не представляетъ трудности доказать методами нашей первой статьи, что сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, дифференцированіе и интегрированіе рядовъ, обладающихъ свойствами $A[k_i, l_i, \sigma_i]$, приводитъ къ алгеброидамъ, обладающимъ свойствами $A[k_i\ l_i\ \sigma_i]$, мы докажемъ, что *для того, чтобы алгеброидъ представлялъ рѣшеніе алгебраидальнаго дифференціальнаго уравненія съ коэффиціентами, удовлетворяющими условіямъ* $A[k_i^{(0)}, l_i^{(0)}, \sigma_i^{(0)}]$, *необходимо, чтобы ему было присуще свойство*

$$A[k, l, \sigma].$$

§ 15. Предположимъ, что y рѣшеніе алгебраическаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка

$$f(x, y, y')=0 \tag{60}$$

выражается въ конечномъ видѣ.

Предполагая y алгеброидомъ, найдемъ ариѳметическія свойства коэффиціентовъ a_n характерныя для этого случая.

Мы знаемъ, *) что въ случаѣ выражаемости въ конечномъ видѣ y имѣетъ одну изъ слѣдующихъ формъ:

1) y алгебраическое.

2) $y=\Omega\ (x, \vartheta)$, Ω алгебраическая функція x и

$$\vartheta=e^{\omega}[\chi_0]^{\lambda_0}\ [\chi_1]^{\lambda_1}\ [\chi_2]^{\lambda_2}\dots[\chi_q]^{\lambda_q} \tag{61}$$

λ_i постоянныя, ω, χ_i алгебраическія функціи отъ x.

3) $y=\Omega\ (x, \zeta)$, Ω алгебраическая функція

x и

$$\zeta=\omega+\sum_{i=1}^{i=p}\lambda_i\ \lg\chi_i \tag{62}$$

---

*) *Д. Мордухай-Болтовской.* Общія изслѣдованія, относящіяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка, статья II. Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества 2 серіи томъ X. 1909 г. стр. 21.

гдѣ φ, χ_i алгебр. функціи отъ x, λ_i постоянныя. Въ первомъ случаѣ, какъ функція алгебраическая y удовлетворяетъ Эйзенштейновскимъ условіямъ:

$$p_n \text{ конечно } \quad \frac{\lambda_n(p)}{n} \text{ конечно}$$

Замѣтимъ, что ϑ и ζ удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$p_0\ \zeta' = P \tag{63}$$

$$p_0\ \vartheta' + p_1\ \vartheta = 0 \tag{64}$$

гдѣ p_0 p_1, P алгебраическія функціи, т. е. алгеброиды, удовлетворяющіе Эйзенштейновскимъ условіямъ A $[0, 1]$

Дифференцируя уравненіе (63), имѣемъ

$$p_0\ \zeta'' + p'_0\ \zeta' = p'$$

$$p_0\ \zeta' = P$$

откуда получаемъ

$$P\ p_0\ \zeta'' + (p'_0\ P - p_0\ P')\ \zeta' = 0 \tag{65}$$

т. е. однородное линейное уравненіе 2 порядка съ коэффиціентами, удовлетворяющими Эйзенштейновскимъ условіямъ.

Если ζ, ϑ алгеброиды, то они должны удовлетворять для нѣкоторыхъ конечныхъ опредѣленныхъ значеній k, l условію

$$A\ [k, l]$$

или, что то же,

$$P\ [k] \quad L\ [l]$$

Но на основаніи § 13 ϑ и ζ не могутъ быть трансцендоидами, если y алгеброидъ, ибо иначе уравненія

$$y = \Omega\ (x, \vartheta)$$

$$y = \Omega\ (x, \zeta)$$

давали бы ϑ, ζ въ формѣ алгеброидовъ.

Обозначая ϑ или ζ черезъ θ, будемъ имѣть уравненіе

$$A_0\ (x,\ \theta)\ y^p + A_1\ (x,\ \theta)\ y^{p-1} + \ldots A_n\ (x,\ \theta) = 0 \qquad (66)$$

гдѣ A_i цѣлыя функціи $(x,\ \theta)$ съ коэффиціентами равными цѣлымъ числамъ (или цѣлымъ R—функціямъ).

Разлагая θ въ рядъ, мы получаемъ $A_i\,(x,\ \theta)$ въ формѣ алгеброидовъ удовлетворяющимъ условіямъ

$$A\ [k',\ l']$$

Въ самомъ дѣлѣ $A_i\ (x,\ \theta)$ получается изъ рядовъ

$$\theta = b_0 + b_1\ x + b_1\ x^2 + \ldots$$

$$x = x + 0 . x + 0 . x^2 + \ldots$$

удовлетворяющихъ условіямъ $A[k.l]$, $A[0.0]$ при помощи сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

Но рѣшеніе уравненія (66) можно представить какъ рѣшеніе линейнаго дифференціальнаго уравненія *).

$$B_0(x,\ \theta)\ y^{(p)} + B_1(x,\ \theta)\ y^{p-1} + \ldots B_{p-1}(x,\ \theta)\ y' + B_p(x,\ \theta) = 0 \quad (67)$$

гдѣ $B_i\ (x,\ \theta)$ раціональныя функціи $A_0,\ A_1 \ldots A_n$ и потому раціональныя функціи $(x,\ \theta)$ и слѣдовательно имъ присущи свойства $A[k'',\ l'']$. Отсюда согласно § 17 нашей статьи слѣдуетъ, что алгеброиду y присуще свойство

$$A\ [k''',\ l''']$$

Такимъ образомъ можно сказать, что, если алгеброидальное *рѣшеніе y алгебраическаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка*

$$f\ (x,\ y,\ y') = 0$$

выражается въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ, то разложенію y присуще свойство $L\,[l]$, причемъ оно распространяется на всѣ множители.

---

*) *Д. Синцовъ.* Раціональные интегралы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій глава III.

Этимъ свойствомъ замѣняется свойство M [σ], состоящее въ конечности $\frac{\lambda_n(p)}{\sigma^n}$ при безконечно великихъ n, которое мы имѣемъ, не вводя условія о выражаемости въ конечномъ видѣ y.

Мартъ. 1910 г.
Варшава.